

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Departamento de Matemáticas

Examen de admisión a la Maestría

7 de enero de 2013

Instrucciones: Resolver todos los problemas de las secciones 1 y 2 y los que pueda de la sección 3. Todas las soluciones deben ser apropiadamente justificadas. El examen tiene una duración de 3 horas.

I. Álgebra lineal

1.1 Sea A una matriz $n \times n$ con entradas en el conjunto $\{0, 1\}$, que tiene exactamente dos unos en cada columna y dos unos en cada renglón. Dar condiciones necesarias y suficientes para que el rango de A sea n .

1.2 A, B matrices $n \times m$ y $m \times n$ respectivamente. Si $AB = I_n$ y $BA = I_m$ probar que $n = m$. Donde I_k es la matriz identidad de tamaño $k \times k$.

1.3 Sea T una transformación lineal de \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m . Probar que existe un M tal que $|T(x)| \leq M|x|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$

2. Cálculo

2.1 Encontrar el límite de la sucesión $\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}$.

2.2 Sea f una función derivable, tal que f' es continua en el intervalo $[a, b]$ probar que

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

2.3 Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = |xy|^{\frac{1}{2}}$. Probar que f no es diferenciable en $(0, 0)$

3. Problemas opcionales

3.1 Encontrar todos los enteros positivos n para los cuales n^2 divide a $2^n + 1$.

3.2 Probar que en \mathbb{R}^n un conjunto es compacto si y solo si es cerrado y acotado. ¿Es cierto este resultado en cualquier espacio métrico?

3.3 ¿Existirá una función discontinua en los irracionales y continua en los racionales?. Justifique.