Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Departamento de Matemáticas

Examen de admisión a la Maestría

28 de agosto de 2000

1. Algebra lineal

1.1 Sea A una matriz $n \times n$ con entradas reales.

a) Probar que A es invertible si y solo si sus columnas forman una base para $\mathbb{R}^n$.

b) Probar que si las entradas de A estan en el conjunto $\{0, 1\}$ y son tales que hay exactamente un 1 en cada fila y cada columna, entonces A es invertible.

1.2 Sea $V_1 + V_2$ subespacios de un espacio vectorial real V de dimensión finita. Probar que $\dim(V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$.

1.3 Encuentre el conjunto de valores $\theta \in \mathbb{R}$ para los cuales la siguiente matriz es diagonalizable:

$$A(theta) = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

2. Cálculo

2.1 Sea $(fn)n$ una sucesión de funciones reales continuas definida sobre un intervalo $[a, b]$ que convergen a una funcin continua $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Probar que si la convergencia es uniforme sobre $[a, b]$, entonces:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_a^b fn(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

2.2 Encontrar las dimensiones del cilindro circular recto de superficie mínima de entre todos aquellos de volumen fijo V.

2.3 Sea D la región acotada por el eje y y la parábola $x = -4y^2 + 3$. Calcular la integral:

$$\int_D x^3 y \, dx \, dy$$

3. Problemas opcionales

3.1 Probar que si K y N son subgrupos de un grupo G, con N normal en G, entonces $K/(N \cap K) \cong NK/N$.

3.2 Probar, usando el lema de Schwarz, que toda biyección holomorfa entre dos discos del plano complejo es de la forma $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, para algunas constantes a, b, c, d.

3.3 Sea A un conjunto conexo, abierto y cerrado en un espacio métrico X. Probar que A es una componente conexa de X.

3.4 Proporcione un ejemplo de conjunto $E \subset \mathbb{R}$ no numerable compacto de medida cero. Justifique su afirmación.