Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Departamento de Matemáticas

Examen de admisión a la Maestría

13 de agosto del 2001

1. Algebra lineal

1.1 Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

(a) Calcule el rango de A.

(b) Sea $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$la transformación lineeal cuya matriz con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^4$ está dada po r A. Calcule una base para el núcleo de T.

1.2 Sea $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal.

(a) Suponiendo que T es invertible, demuestre que λ es valor propio de T si y sólo si λ^{-1} es valor propio de T^{-1}.

(b) Si V es de dimensión finita, demuestre que T es invertiblesi y sólo si $\vec{0}$ no es un valor propio de T.

1.3 Determine si la siguiente matriz es diagonalizable

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

En caso afirmativo, encuentre una matriz Q tal que $Q^{-1}AQ$ sea una matriz diagonal.

2. Cálculo

2.1 Hallar la deriva de la función:

$$F(x) = \int_a^b \frac{x^2}{1 + 2\text{sen}^3 t + \text{sen}^6 t} dt$$

2.2 Considere la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$A = \begin{cases} \text{sen}(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) Decida si f es continua en x_o cuando $x_o \neq 0$.

(b) Sea $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ la suceción dada por $y_n = f(\frac{1}{n\pi})$. Calcule $\lim_{n \longrightarrow \infty} y_n$.

(c) Decida si f es continua en $x = 0$.

2.3 Sean f y g funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.Es verdad que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ si y sólo si $f(y) = g(y)$ para todo $y \in \mathbb{Q}$?

3. Problemas opcionales

3.1 Diga si la función $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \bar{z}$ es analítica en $\mathbb{C}$.

3.2 Considere la norma en $\mathbb{R}^n$ dada por: $\|\vec{x}\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|$. Compare las topologías en $\mathbb{R}^n$ inducidas por $\|\cdot\|_1$ y la norma euclidiana.

3.3 Un icosadero truncado (*i.e un balón de futbol*) es un poliedro cuyas caras son pentágonas y hexágonas regulares. ¿Cuantas caras pentagonales tiene? Sugerencias: Recuerde que la característica de Euler de la esfera es 2.

3.4 Sea $G_{m,n} = Hom(\mathbb{Z}/m, \mathbb{Z}/n)$ el grupo de todos los homomorfismos h :

$\mathbb{Z}/m \longrightarrow \mathbb{Z}/n$, con la operación de sumas de funciones: $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$. Calcule el orden de $G_{m,n}$.