Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Departamento de Matemáticas

Examen de admisión a la Maestría

16 de diciembre del 2008

1. Algebra Lineal

1.1 Sea A una matriz cuadrada de orden n con entradas reales y sea I la matriz identidad de orden n. Demuestre que si $A^2 = 2I$, entonces A es una matriz invertible. Encuentre la inversa de A en terminos de I y A.

1.2 Determine la matriz con respecto a la base canónica de un operador lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que satisface que $T^2 = I$ y $T((1, 1)) = (1, 0)$.

1.3 Sea A una matriz cuadrada de orden n con entradas reales invertible. Demuestre que existen matrices reales P y Q tal que P es simetrica definida positiva, Q es ortogonal (esto es, $QQ^t = I$), y $A = PQ$.
Sugerencia: Utilice las propiedades de AA^t.

2. Cálculo

2.1 Sean k un entero positivo fijo y $0 < a < 1$ un numero real. Demuestre que el limite

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} a^n = 0$$

Recuarde que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

2.2 Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, 0) = 0$ y

$$f(x, y) = (1 - \cos \frac{x^2}{y})\sqrt{x^2 + y^2} \text{ para } y \neq 0.$$

(a) Demuestre que f es continua en $(0, 0)$,
(b) Calcule todas las derivadas direccionales de f en $(0, 0)$,
(c) Demuestre que f no es diferenciable en $(0, 0)$.

2.3 Demuestre que la ecuación $ae^x = 1+x+\frac{x^2}{2}$, donde a es una constante positiva, tiene exactamente una raiz real.

3. Problemas opcionales

3.1 De un ejemplo o demuestre que no hay ejemplos para cada una de las siguientes grupos:

(a) Un grupo no abeliano,

(b) Un grupo abeliano finito que no es ciclico,

(c) Un grupo infinito con subgrupos de indice cinco,

(d) Dos grupos finitos del mismo orden pero no isomorfos,

(e) Un grupo G con un subgrupo H no normal,

(f) Un grupo G con un subgrupo H de indice dos que no sea normal.

3.2 Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales con la topología usual. ¿Cuales de las siguientes afirmaciones son correctas?

(a) La unión de toda familia de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

(b) La unión de toda familia de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

(c) Todo conjunto infinito y acotado tiene una sucesión de puntos distintos que convergen en $\mathbb{R}$.

3.3 Sea f una función continua en $[0, 1]$. Calcule el siguiente limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n f(x)dx.$$

3.4 Demuestre que para toda x se tiene

$$2^x + 3^x - 4^x + 6^x - 9^x \leq 1$$