Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Departamento de Matemáticas

Examen de admisión a la Maestría

13 de Enero de 2003

1. Algebra lineal

1.1 Sea $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ el espacio vectorial de matrices $n \times n$ sobre los complejos.

1.1.a Pruebe que la función $F(A, B) = tr(AB^*)$ define un producto interno en $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Aqui B^* denota la transpuesta conjugada de la matriz B.
1.1.b Encuentre una base ortonormal de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ respecto a este producto interno.

1.2 Mostrar que para cada $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, el operador lineal $T_B : \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ tiene determinante nulo, donde T_B está definido por $T_B(A) = AB - BA$.

1.3 Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita y T un operador lineal sobre V. Sean $c_1, c_2, ..., c_k$ los valores propios distintos de T y, para $i = 1, 2, ..., k$, sea W_i es espacio propio asociado a c_i. Mostrar la equivalencia de las siguientes dos aseveraciones:

A. La matriz asociada a T respecto a alguna base de V es diagonal.
B. El polinomio característico de T es de la forma $(x-c_1)^{d_1}(x-c_2)^{d_2} \cdots (x-c_k)^{d_k}$, donde $\dim(W_i) = d_i$, para $i = 1, 2, ..., k$.

2. Cálculo

2.1 Demostrar el Criterio de D'Alembert para convergencia de series: "Toda serie $\sum_{i \geq 1} a_n$ de términos positivos que satisfaga la condición

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

es convergente".

2.2 Sea f una función diferenciable en el intervalo cerrado $[a, b]$.

2.2.a ¿Es f' necesariamente continua? Argumente (ejemplificando una respuesta negativa; demostrando una respuesta positiva).

2.2.b Supóngase la existencia de un punto C con $f'(a) < C < f'(b)$. Analice la función g definida por $g(x) = f(x) - C(x - a)$ para deducir la existencia de un punto x_0 con $a < x_0 < b$ y tal que $f'(x_0) = C$.

2.3 Encuentre la derivada de la función F definida en $[0, 1]$ por la fórmula $F(x) = \int_{2-x}^{2+x} \ln(\sqrt{t})dt$.

3. Problemas opcionales

3.1 Sea $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la proyección $\phi(x, y) = x$. ¿Es ϕ una función cerrada? ¿Abierta?

3.2 Sea G un grupo finito y H subgrupo (no necesariamente normal) de G. Para $a \in G$ sea $f(a)$ el mínimo positivo m tal que $a^m \in H$. Pruebe que $f(a)$ es un divisor del orden de a en G.

3.3 Para $n \geq 0$, evaluar (recursivamente) la integral indefinida $\int e^{-x}x^n dx$.

3.4 Demuestre que todo conjunto abierto de la recta real es una unión a lo sumo numerable de intervalos abiertos.