Examen de Admisión a la Maestría / Doctorado

24 de Junio de 2016

Nombre: ____

Instrucciones: En cada reactivo seleccione la respuesta correcta encerrando en un círculo la letra correspondiente. Puede hacer cálculos en las hojas que se le proporcionaron.

Duración del examen: 2 hrs 30 min

1. ¿Cuál de los siguientes no es un espacio vectorial?

   (a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_3 = 0\}$.

   (b) El conjunto de soluciones $\mathbf{x}$ de $A\mathbf{x} = 0$, donde A es una matriz $m \times n$.

   (c) El conjunto de matrices 2×2, A, tales que $\det(A) = 0$.

   (d) El conjunto de polinomios $p(x)$ tales que $\int_{-1}^{1} p(x)\, dx = 0$.

   (e) El conjunto de soluciones $y = y(t)$ de la ecuación $y'' + 4y' + y = 0$.

2. Sea U el subespacio de $\mathbb{R}^5$ dado por

   $$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 = 3x_2 \quad \text{y} \quad x_3 = 7x_4\}$$

   Entonces una base para U es:

   (a) $\{\, (1, 3, 0, 0, 0),\ (0, 0, 1, 7, 0)\,\}$.

   (b) $\{\, (3, 1, 0, 0, 0),\ (0, 0, 7, 1, 0),\ (1, \frac{1}{3}, -1, -\frac{1}{7}, 0),\ (0, 0, 0, 0, 1)\,\}$.

   (c) $\{\, (3, 1, 0, 0, 0),\ (0, 0, 7, 1, 0)\,\}$.

   (d) $\{\, (3, 1, 0, 0, 0),\ (0, 0, 7, 1, 0),\ (-6, -2, \frac{1}{7}, \frac{1}{49}, 0)\,\}$.

   (e) $\{\, (1, \frac{1}{3}, 0, 0, 0),\ (0, 0, 7, 1, 0),\ (0, 0, -1, -\frac{1}{7}, 1)\,\}$.

3. Si A es una matriz 5×5 con $\det A = -1$, ¿cuánto vale $\det(-2A)$?

   (a) -2 (b) 2 (c) 4 (d) -32 (e) 32

4. Sea L una matriz 2×2. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones siempre es cierta?

   (a) Si $L^2 = 0$ entonces $L = 0$.

   (b) Si $L^2 = L$ entonces $L = 0$ o $L = I$.

   (c) Si $L^2 = I$ entonces $L = I$ o $L = -I$.

   (d) Si $L = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, con $a, d = \pm 1$, L es la identidad o representa una reflexión con respecto al eje x, al eje y o al origen.

   (e) El sistema de ecuaciones $L\mathbf{x} = \mathbf{b}$ siempre tiene solución.

5. Sea $V = C(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con las operaciones usuales (suma y producto por escalar) y sea $W = \mathcal{L}\{\operatorname{sen} x, \cos x\}$ el subespacio generado por las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$. Entonces:

(a) $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ son linealmente dependientes

(b) $\dim W = +\infty$

(c) $\dim V = \dim W + 2$

(d) Todo vector en W es solución de la ecuación $y'' + y = 0$

(e) $W = V$

6. Sea B una matriz 2×2 con entradas en $\mathbb{C}$ tal que $\operatorname{tr}(B) = 5$ y $\operatorname{tr}(B^2) = 1$

[Aquí $\operatorname{tr}(B)$ denota la *traza*, es decir, la suma de las entradas de la diagonal].

Entonces el determinante de B es igual a:

(a) 25 (b) 1 (c) 24 (d) 0 (e) 12

7. Supongamos que la matriz A es semejante a la matriz $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces:

(a) $A^2 = A$

(b) $\det A = 0$

(c) $\operatorname{traza}(A) = 1$

(d) $\lambda = 0$ es un valor propio de A.

(e) $\lambda = 1$ es un valor propio de A.

8. Sea A una matriz $n \times n$ y λ un valor propio de A con vector propio v. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

(a) $-v$ es un vector propio de $-A$ con valor propio $-\lambda$.

(b) Si B es una matriz $n \times n$ y μ es valor propio de B, entonces $\lambda\mu$ es un valor propio de AB.

(c) Sea c un escalar. Entonces $(\lambda + c)^2$ es valor propio de $A^2 + 2cA + c^2 I$.

(d) Si μ es valor propio de una matriz $n \times n$ B, entonces $\lambda + \mu$ es un valor propio de $A + B$.

(e) $-\lambda$ es una raíz del polinomio característico de A.

9. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la reflexión en el plano ortogonal al vector $(1, 0, 1)$. Entonces la matriz de T con respecto a la base canónica es:

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

10. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \to V$ una transformación lineal. Entonces T es invertible si y sólo si

(a) La matriz de T es cuadrada.
(b) T es inyectiva.
(c) $\ker T = V$.
(d) T tiene al menos un valor propio $\lambda \neq 0$.
(e) Existe al menos un vector $v \in V$ tal que $v \notin \operatorname{Im} T$.

11. Considérese la ecuación general de la cónica $\mathbf{x}^t Q \mathbf{x} = 0$ donde $Q = \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$

y $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$. ¿Para qué matriz Q es ésta la ecuación de una hipérbola?

(a) $\begin{pmatrix} 9 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 3 & 7 & -1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

12. Sea $\theta \in \mathbb{R}$ un número real que no es un múltiplo entero de π. Entonces la matriz $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

(a) es simétrica. (b) satisface $A^2 = I$. (c) no tiene valores propios reales.

(d) es una reflexión sobre la recta $y = (\tan\theta)x$. (e) tiene determinante $\neq 1$.

13. Sean $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Entonces, una matriz 3×3 tal que $Au_1 = u_1$, $Au_2 = 2u_2$ y $Au_3 = 3u_3$ es:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 7/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 5/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 2 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 7/3 & 0 & -2/3 \\ 0 & 5/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 2 \end{pmatrix}$

14. Sea $V = P_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de todos los polinomios reales de grado ≤ 2, equipado con el producto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx$$

y sea $T : V \to V$ el operador dado por $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1x$. Entonces:

(a) V posee una base ortonormal de vectores propios de T.

(b) T es autoadjunto.

(c) T no es autoadjunto.

(d) $\dim V = 2$.

(e) $\dim(\ker T) + \dim(\operatorname{Im} T) = 4$.

15. Si la matriz $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ posee tres vectores propios linealmente independientes, entonces:

(a) $\det C = 1$ (b) $\det C = -xy$ (c) C tiene rango 0 (d) $\operatorname{tr}(C^2) \neq 3$

(e) $x + y = 0$

16. ¿Cuál de las siguientes funciones $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ es biyectiva, diferenciable y con inversa diferenciable?

(a) $f(x) = \tan(\frac{\pi}{2}x)$ (b) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}}$ (c) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^x}$ (e) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$

17. Si $f(x) = -2x^3 + 6x - 2$, entonces existe $c \in [-2, 2]$ tal que

(a) $f'(c) = 4[f(2) - f(-2)]$.

(b) $f'(c) = \dfrac{f(2)}{4} - \dfrac{1}{2}$.

(c) $f(c) = f(2) - f(-2)$.

(d) $f'(c) = f(-2) - f(2)$.

(e) $\left| \displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\, dx \right| = \dfrac{f'(c)}{2-(-2)}$.

18. Los puntos críticos y extremos de la función $f(x, y) = -(x^4 - 8x^2 + y^2 + 1)$ son:

(a) máximo local en $(2, 0)$ y en $(-2, 0)$.

(b) máximo local en $(2, 0)$ y mínimo local en $(-2, 0)$.

(c) mínimo local en $(2, 0)$ y máximo local en $(-2, 0)$.

(d) máximo local en $(0, 0)$.

(e) punto silla en $(0, 0)$.

19. El valor exacto de la suma $\tan^{-1} 1 + \tan^{-1} 2 + \tan^{-1} 3$ es:

(a) $\dfrac{\pi}{2}$ (b) π (c) $\dfrac{3\pi}{2}$ (d) $\dfrac{\pi}{4} - 1$ (e) $\dfrac{\pi}{2} - 1$

20. El área entre las curvas $y = x^3 - x$ y $y = x - x^3$ es:

(a) -2 (b) -1 (c) 0 (d) 1 (e) 2

21. El valor de la serie infinita $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}$ es

(a) racional (b) $+\infty$ (c) $\dfrac{e}{1-e}$ (d) $\dfrac{e}{e+1}$ (e) $\dfrac{e}{e-1}$

22. Si f y g son funciones diferenciables, la segunda derivada de la composición $y = g(f(x))$ es igual a:

(a) $y'' = g''(f''(x))$

(b) $y'' = g''(f(x))f''(x)$

(c) $y'' = g''(f'(x))[f'(x)]^2$

(d) $y'' = g''(f(x))f'(x) + [g(f(x))]^2 f''(x)$

(e) $y'' = g'(f(x))f''(x) + g''(f(x))[f'(x)]^2$

23. La función $f(x) = x|x|$

(a) es continua en 0. (b) es derivable en 0. (c) es biyectiva.
(d) Todas las anteriores (e) no es derivable en 0.

24. La derivada parcial respecto a x de $f(x,y) = \arctan\left(\dfrac{x-y}{1+xy}\right)$ es:

(a) $\dfrac{1}{1+(x-y)^2}$ (b) $\dfrac{1}{1+x^2y^2}$ (c) $\dfrac{-y}{x^2y^2+2xy+2}$ (d) $\dfrac{1}{1+x^2}$ (e) $\dfrac{1}{1+y^2}$

25. El valor de la integral impropia $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ es:

(a) $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ (b) $\sqrt{\pi}$ (c) 1 (d) $\dfrac{1}{2\pi}$ (e) Negativo

26. La serie infinita $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

(a) converge a $\ln(\ln e^e)$ (b) converge a $\dfrac{\pi^2}{\ln 6}$ (c) contiene términos negativos

(d) es igual a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (e) diverge

27. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. Entonces f es:

(a) discontinua en todo punto. (b) derivable en 0. (c) acotada.

(d) continua únicamente en 0. (e) integrable en el intervalo $[0, 1]$.

28. ¿Cuales son los máximos y mínimos de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 e^{-x}$?

(a) máximo en $x = -2$, mínimo en $x = 0$.
(b) mínimo en $x = -2$, máximo en $x = 0$.
(c) máximo en $x = 0$, mínimo en $x = 2$.
(d) mínimo en $x = 0$, máximo en $x = 2$.
(e) mínimos en $x = -2$ y $x = 2$.

29. Si $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\, dt$, entonces la derivada de la función inversa $F^{-1}(x)$ es igual a

(a) $\dfrac{1}{x}$ (b) x (c) $\dfrac{1}{F'(x)}$ (d) $-F'(x)$ (e) $F^{-1}(x)$

30. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3 - 3y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Entonces:

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 2$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = -3$ (b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = -2$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 3$

(c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ no existe (d) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ no existe

(e) las parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ no existen en el punto $(0, 0)$