Examen de admisión
Departamento de Matemáticas del CINVESTAV
Noviembre 2022

Álgebra Lineal

1. ¿Cuál de los siguientes es un subespacio vectorial de $\mathbb{Q}^n$?

   a) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Q}^n :$ donde todos los x_i son enteros$\}$;
   b) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Q}^n :$ donde $x_1 = 0\}$;
   c) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Q}^n :$ donde x_1 o x_2 son cero$\}$;
   d) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Q}^n :$ donde $3x_1 + 4x_2 = 1\}$.
   e) $\mathbb{R}$.

2. Sea P_3 el espacio vectorial de polinomios en $\mathbb{R}$ de grado a lo más 3. Sea $D : P_3 \to P_3$ el operador diferencial definido por $(D(p))(t) = dp/dt$. ¿Cuál de las siguientes es la matriz de D con respecto a la base $\{1, t, t^2, t^3\}$.

   a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

   b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

   c) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

   d) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

   e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

3. Encuentre el polinomio característico de $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

   a) $t^3 - t^2 - 2t + 4$;

   b) $t^3 - t^2 + 2t$;

   c) $t^3 - t^2 + 2t + 4$;

   d) $t^3 + t^2 + 2t + 4$;

   e) t.

4. Supongamos que la matriz A es semejante a la matriz $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Entonces:

   a) $\text{traza}(A) = 1$;

   b) $\det(A) = 0$;

   c) $\lambda = 0$ es un valor propio de A;

   d) $\lambda = 1$ es un valor propio de A.

   e) $A = 0$

5. Sea $V = P_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de todos los polinomios reales de grado ≤ 2, equipado con el producto interno $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx$ y sea $T : V \to V$ el operador dado por $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1x$. ¿Cuál de los siguientes enunciados es válido?

   a) $\dim V = 2$.

   b) $\dim(\operatorname{Ker} T) + \dim(\operatorname{Im} T) = 4$.

   c) T es invertible

   d) T es sobreyectivo

   e) T tiene eigenvalor 1.

6. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 6 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & \lambda & 4 \end{pmatrix}.$$

Sea $X \subseteq \mathbb{R}^5$ el subespacio generado por las columnas de A. Sea $Y \subseteq \mathbb{R}^8$ el subespacio generado por los renglones de A.

a) $\dim X < \dim Y$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) $\dim X = \dim Y$ para un número finito de $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) $\dim X = 4$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

d) $\dim Y \geq 4$ para un número finito de $\lambda \in \mathbb{R}$.

e) Ninguna de las otras afirmaciones es cierta.

7. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$. Sea $V^* = \{\text{funciones lineales: } V \to \mathbb{R}\}$. Entonces

a) $\dim V^* > \dim V$.

b) Para $v_0 \in V$ fijo, $\{f(v_0) \colon\ f \in V^*\} = \mathbb{R}$.

c) Para $f_0 \in V$ fijo, $\{f_0(v) \colon\ v \in V\} = \mathbb{R}$.

d) Si $\varphi \colon V^* \to \mathbb{R}$ es lineal, entonces existe $v_0 \in V$ tal que $f(v_0) = \varphi(f)$ para cada $f \in V^*$.

e) Ninguna de las otras afirmaciones es necesariamente cierta.

8. Sea X el espacio de funciones continuas y real-valuadas con dominio $[0,1]$. Considere el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)e^{-t}dt$ y $\| \bullet \|$ la norma asociada. ¿Cuál es falsa?

a) Hay $f \in X$ con $\|f\| = \infty$.

b) Hay $f, g \in X$ tal que $\langle f, g\rangle = 0$.

c) Si $f(t) = e^t$, $\|f\| \neq 1$.

d) Si $f(t) = e^{t/2}$, $\|f\| \geq 1$

e) Si $f(t) = 1$, $\|f\| \leq 1$

9. Considere el espacio vectorial de todas las secuencias de números reales $(y_1, y_2, y_3, ...) \in \mathbb{R}^\infty$ y el operador de translado

$$S(y_1, y_2, y_3, ...) = (y_2, y_3, y_4, ...).$$

¿Cuál de las siguientes representa un eigenvector de S?

a) $(0, 1, 0, ..., 0, ...)$,

b) $(0, 1, 1, ..., 1, ...)$,

c) $(1, 0, 1, ..., 1, ...)$,

d) $(1, 2, 4, ..., 2^n, ...)$,

e) $(1, 2, 6, ..., n!, ...)$.

10. Sea $V = \mathbb{R}^3$ y $T : V \to V$ un operador lineal; sus eigenvalores son 1 con multiplicidad 2 y 2 con multiplicidad 1. Considere ahora el operador $L = T \circ T$ y $p(x)$ el polinomio característico de L. ¿Cuál es el valor de $p(0)$?

    a) 0

    b) 2

    c) -2

    d) 4

    e) -4

11. Las series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$:

    a) ambas convergen;

    b) ambas divergen;

    c) la primera converge y la segunda diverge;

    d) la primera diverge y la segunda converge;

    e) no se sabe.

12. Sea α un número real, considera la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha n}.$$

    ¿Cuál es el conjunto de valores α para los cuales converge esta serie?

    a) $\{\alpha < 0\}$;

    b) $\{\alpha \leq 0\}$;

    c) $\{\alpha \leq -1\}$;

    d) $\{\alpha < -1\}$;

e) $\{\alpha = 0\}$.

13. Sea a_n la sucesión definida recursivamente como sigue: $a_1 = \sqrt{2}$ y $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$. Entonces la sucesión a_n

    a) converge a 2;

    b) diverge;

    c) converge a $\frac{2}{\sqrt{2}}$;

    d) converge a e;

    e) converge a 0.

14. Calcular $\lim_{h\to 0} \frac{\int_1^{x+h} e^{-t^2} dt - \int_1^x e^{-t^2} dt}{h}$.

    a) $-2xe^{-x^2}$;

    b) 0;

    c) 1;

    d) ∞;

    e) e^{-x^2}.

15. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con serie de Taylor convergente a $f(x)$ para todo número real x. Si $f(0) = 2$, $f'(0) = 2$ y $f^{(n)}(0) = 3$ para $n \geq 2$, ¿cuánto vale $f(x)$?

    a) $e^{3x} + 2x + 1$;

    b) $3e^x - x - 1$;

    c) $3e^x + 2x - 1$;

    d) $3e^x + 5x + 5$;

    e) 0.

16. Sea $a_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right) + (-1)^n \frac{\cos(n)}{n}$. ¿Cuál enunciado es cierto sobre la sucesión a_n?

    a) Converge a 0;

    b) Converge a un número positivo.

    c) Es acotada pero no converge;

d) Diverge.

e) Es estrictamente monótona.

17. ¿Cuál de las siguientes caracteriza una solucion a la ecuación diferencial

$$y \ln y + xy' = 0 \text{ con } x > 0?$$

a) $xy \ln y = 1$;

b) $(\ln y)^2 = 2$;

c) $-y(\ln y)(\ln x) = 1$;

d) $x = 0$;

e) $x \ln y = 1$.

18. Calcula la integral indefinida $\int \frac{1}{1+e^x} \mathrm{d}x$.

a) $\ln(1 + e^x) + C$;

b) $x - \ln(1 + e^x) + C$;

c) $x + \ln(1 + e^x) + C$;

d) $x - \ln(1 - e^x) + C$;

e) 0.

19. Suponga que existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 + \sin(f(x))/2$. Entonces el valor de $f'(0)$ es

a) -2;

b) -1;

c) 0;

d) 1;

e) 2.

20. Sea $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$. ¿Cuál es el valor de $f(1/2)$?

a) -5;

b) -4;

c) 2;

d) 3;

e) 4.

21. Si $\{z_n\}$ y $\{\zeta_n\}$ son sucesiones de Cauchy en $\mathbb{C}$
¿Cuál de las siguientes necesariamente también lo es?

    a) $z_n + 1/\zeta_n$;

    b) $\frac{z_n}{\zeta_n\overline{\zeta_n}+1}$;

    c) z_n/ζ_n;

    d) $\tan(\zeta_n)$;

    e) n.

22. ¿Cuál de las siguientes funciones define una métrica en $\mathbb{R}$?

    a) $d(x,y) = 0$ si $x = y$ y $d(x,y) = 1$ si $x \neq y$.

    b) $d(x,y) = xy$;

    c) $d(x,y) = \max\{|x|,|y|\}$

    d) $d(x,y) = (x-y)^2$.

    e) $d(x,y) = -1$.

23. Sea $X = \mathbb{N} \times \mathbb{Q}$, un subespacio topológico de $\mathbb{R}^2$, y $P = \{(n, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}, n > 0\}$. Entonces en el espacio X

    a) P es abierto pero no cerrado.

    b) P es abierto y cerrado.

    c) P no es abierto ni cerrado.

    d) P es vacio.

    e) P es cerrado pero no abierto.

24. Sean f y $f_n\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ funciones continuamente diferenciables tales que $f_n \to f$ uniformemente. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones necesariamente es cierta?

    a) $f_n' \to f'$ uniformemente en $(1/2, 3/4)$.

    b) $f_n' \to f'$ puntualmente pero no necesariamente uniformemente en algún subintervalo abierto no-vacío.

c) $\{f_n'(x) - f'(x)\}$ es acotado.

d) Existe n tal que $\tan |\{f_n(x) - f(x)| < 1$ para todo $x \in (0,1)$.

e) Ninguna de las otras afirmaciones es necesariamente cierta.

25. Sea $s(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k}$. Entonces

a) $\{s(n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy.

b) $\{\sqrt{s(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ tiene puntos de acumulación.

c) Existen m, n arbitrariamente grandes tales que $s(n) - s(m) > 1$.

d) $s(2n) > 2s(n)$ para todo n suficientemente grande.

e) $\lim_{n\to\infty} s(n)$ es irracional.

26. Sea $f(x+y) = f(x)f(y) \neq 0$ para $x, y \in \mathbb{R}$. ¿Cuál de las afirmaciones no se sigue?

a) Si f es continua en $x = 0$, entonces f es continua en todo $\mathbb{R}$.

b) Si f es diferenciable en $x = 0$, entonces $f'(x) = f'(0)f(x)$.

c) $f(0) = 1$.

d) $f(1)$ es racional.

e) Todas las otras afirmaciones se siguen.

27. Sea $V = \{$sucesiones $(x_n)_1^{\infty}$ con $x_n \in \mathbb{R}$ tales que $\sum_1^{\infty} x_n^2 < \infty\}$, $|(x_n)| = (\sum_1^{\infty} x_n^2)^{1/2}$, $B = \{(x_n) \in V \colon |(x_n)| \leq 1\}$, y con las operaciones $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$, $r(x_n) = (rx_n)$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

a) V es un espacio vectorial.

b) $|x + y| \leq |x| + |y|$ para todos $x, y \in V$.

c) Toda sucesión de elementos de B tiene una subsucesión convergente.

d) Toda sucesión de Cauchy en el espacio métrico V es convergente.

e) Todas las otras afirmaciones son ciertas.

28. Sea $I = \{\sum_{k=1}^{\infty} a_k/2^k : a_k \in \{0,1\}\}$, ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

a) $I \subseteq [0,1]$

b) I es numerable

c) I contiene números irracionales

d) I tiene la misma cardinalidad que $\mathbb{R}$

e) Todas las otras opciones son ciertas.

29. Calcule el valor de $\lim_{x\to 0}(1+1/x)^x$.

a) ∞

b) 1

c) e

d) 0

e) $-\infty$

30. Sea $f(x) = x^5 + 4x + 3$ y g la función inversa de f. Calcule el valor de $g'(8)$.

a) $1/6$

b) $1/7$

c) $1/8$

d) $1/9$

e) $1/10$